اى ان الكمية $Q$ تحدد بمقدار ميلان المماس بالنسبة للرسم البيانى للعزوم.
يكون عزم الحناية للقضيب $CD$ ثابتا، اى $M = \mathrm{const}$ ، اذن $Q = 0$،
وللقضيب $DE$ :

$$Q = \frac{4}{2} = 2t \,.$$

ويمكن طبعا، تحديد القوة العرضية، باعتبارها مجموعا لمساقط القوى المتجهة عموديا على محور القضيب، والتى تؤثر على جهة واحدة من المقطع.
وتثبت اشارة القوة العرضية (قوة القص) حسب القاعدة السابقة. تكون $Q$ موجبة اذا كان الرسم البيانى لـ $M$ صاعدا واذا نظرنا الى القضيب $DE$ من اليسار الى اليمين. ونخطط الرسم البيانى لقيم $Q$ الموجبة فى الجهة اليمنى (الشكل ٦ — ١٥، $c$).

ونحدد القوة الطولية $N$ باستعمال طريقة القطع (الشكل ٦ — ١٥، $d$).
وبالنسبة للقضيب $DE$ (الشكل ٦ — ١٥، $e$)، فباسقاط القوى التى تؤثر فى اسفل المقطع I — I، على اتجاه محور القضيب $DE$، نحصل على $N_{DE} = 0$ .

وبالنسبة للقضيب $CD$، فباسقاط القوى التى تؤثر فى يمين المقطع II — II، على اتجاه محور القضيب $CD$، نحصل على $N_{CD} = -2t$ (انضغاط).
وتوضع القيمة السالبة لـ $N$ فى اسفل محور القضيب، والاشارة السالبة تمثل الانضغاط (انظر الشكل ٦ — ١٥، $d$).

## ٥٢ — تحديد الاجهادات العمودية

تظهر فى المقاطع العرضية عند الانحناء الخالص والمستوى فقط عزوم الحناية التى تؤثر فى المستوى المار باحد المحاور المركزية الرئيسية للعتبة، وفى هذه الحالة خلال المحور $y$ (الشكلان ٦ — ١٧ و ٦ — ١٨).
ويعتبر عزم الحناية، كعزم محصلة القوى العمودية الداخلية الموزعة على المقطع.

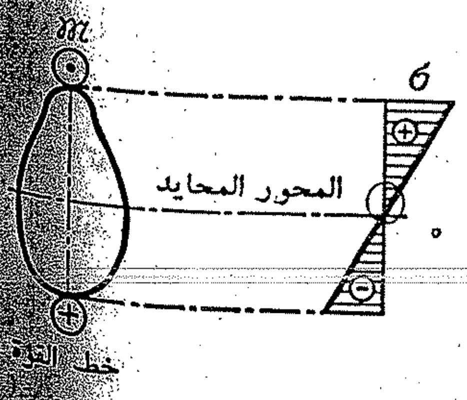
ولوضع قانون لتوزيع القوى الداخلية التى تظهر فى المقطع العرضى للعتبة وتحديد مقدارها، فان معادلات الاستاتيكا لا تكفى، ومن الضرورى استعمال شروط تشوه العتبة.

واذا تعرضت العتبة (النموذج) التى خطط سطحها على شكل شبكة، للانحناء الصافى والمستوى فاننا نكتشف ما يلى (الشكل ٦ — ١٦):

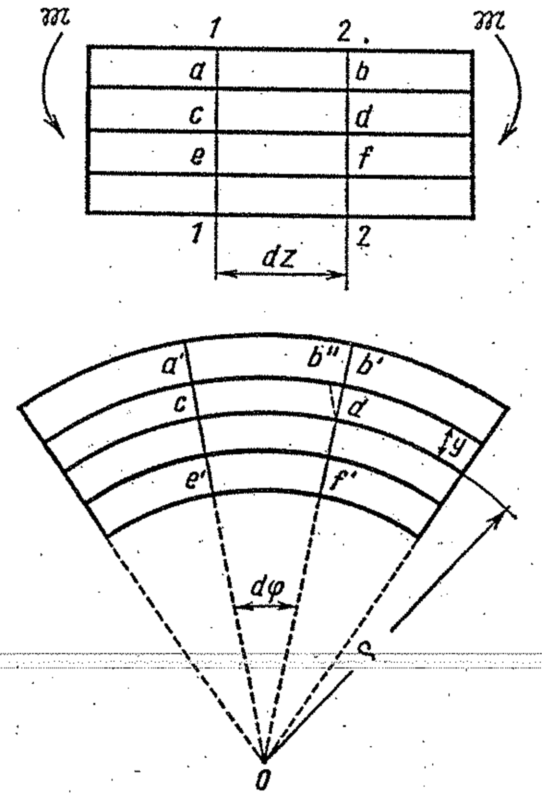
١ — يدور الخطان 1 — 1 و 2 — 2 اللذان يقعان على سطح العتبة، بعد التشوه بزاوية معينة مقدارها $d\varphi$ ويبقيان — مستقيمين. ويمكن الافتراض ان المقاطع العرضية للعتبة التى تكون مستوية قبل التشوه ، تبقى مستوية حتى بعد التشوه ايضا (نظرية المقاطع المستوية). ان الحسابات المبنية على اساس مثل هذا الافتراض، تنطبق بصورة جيدة مع التجارب.

٢ — ان الليفة $ab$ فى جهة تحدب العتبة تطول، وهذا ما يشهد على شد هذه الليفة، اما الليفة $ef$ فانها تتقلص، وهذا ما يشهد على انضغاطها. اما طول الليفة $cd$ فيبقى ثابتا، وهذا يشهد على ان هذه الليفة لم تتعرض لا للشد ولا للانضغاط.

ان طبقات العتبة (على مستوى الليفة $cd$ )، التى لا تتعرض للشد او الانضغاط عند الانحناء، تسمى بالطبقة المحايدة. ويسمى خط تقاطع الطبقة



الشكل ٦ — ١٧



الشكل ٦ — ١٦

المحايدة مع مستوى المقطع العرضى للعتبة (الشكل ٦ ــ ١٧)، بالمحور المحايد. ويسمى خط تقاطع مستوى القوى مع مستوى المقطع العرضى بخط القوى.

ونستنتج من نتائج التجارب المذكورة، ان الياف العتبة تتشوه بصور مختلفة: فكلما كانت الالياف بعيدة عن الطبقة المحايدة، كلما تعرضت لتشوهات اكثر. وسوف نبين بان التشوهات على طول مقطع العتبة تتغير بقانون خطى.

وفى الحقيقة فان القسم $b'b''$ يمثل الاستطالة الكاملة لليفة $ab$، وهو الطول الذى كان قبل التشوه يساوى طول $cd$، الذى يعود الى الطبقة المحايدة. والاستطالة النسبية لهذه الليفة تساوى:

$$\varepsilon=\frac{b'b''}{ab}=\frac{b'b''}{cd}=\frac{yd\varphi}{\rho d\varphi}=\frac{y}{\rho} \qquad (٦ ــ ٤)$$

حيث $\rho$ ــ نصف قطر تقوس الطبقة المحايدة للعتبة. ان مقدار $\rho$ مجهول حتى الان.

$y$ ــ المسافة بين المحور المحايد والليفة المطلوبة.

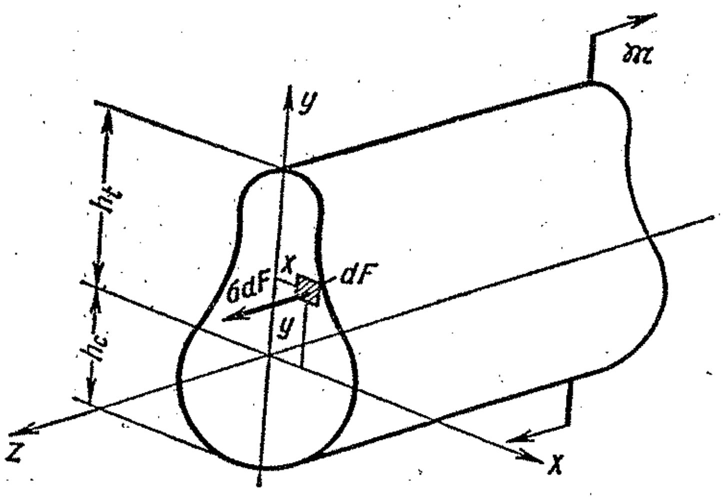
وقبل الانتقال الى تحديد الاجهادات، نأخذ فرضية اخرى، وهى: نفرض بان الياف العتبة لا تضغط على بعضها البعض، اى ان الاجهادات المتجهة عموديا على محور العتبة تساوى صفرا. اذن فان كل ليفة تتعرض لشد او انضغاط وحيد المحور. والصيغة التى نحصل عليها بناء على هذه الفرضية تعطى نتائج مطابقة للتجارب وبصورة جيدة. فنحصل عند ذلك وحسب قانون هوك لحالة الاجهاد الوحيد المحور على:

$$\sigma=E\varepsilon=E\frac{y}{\rho}, \qquad (٦ ــ ٥)$$

اى ان الاجهادات العمودية فى طول المقطع العرضى للعتبة تتغير بتناسب طردى مع المسافة من محور الحياد. والاجهادات العظمى توجد فى طرفى المقطع الاعلى والاسفل.

ويبين الشكل ٦ ــ ١٧ الرسم البيانى لـ $\sigma$. وتعتبر اجهادات الشد موجبة.

ويجب التأكد من ان متجهات الاجهادات العمودية، تكون عمودية على مستوى المقطع العرضى للعتبة اما الاقسام التى تمثلها فى الرسم البيانى فتنطبق مع مستوى المقطع اصطلاحيا.




الشكل ٦ — ١٨

وبعد وضع قانون لتوزيع الاجهادات، يمكن تحديد مقدارها من معادلات التوازن. نبحث توازن قسم العتبة الذى يقع تحت تأثير العزم الخارجى $\mathfrak{M}$ والقوى الداخلية التى تظهر فى المقطع العرضى (الشكل ٦ — ١٨). وعند توازن قسم العتبة هذا، يجب تحقيق ست معادلات للتوازن: ان يكون مجموع مساقط القوى التى تؤثر على محاور الاحداثيات الثلاثة مساويا للصفر، وان مجاميع العزوم الثلاثة بالنسبة للمحاور $x$ و $y$ و $z$ يساوى صفرا:

١ — نساوى مجموع المساقط على المحور $y$ للصفر: $\Sigma Y = 0$.

٢ — نفس الشئ على المحور $x$ : $\Sigma X = 0$ .

ان $\Sigma X = 0$ و $\Sigma Y = 0$ تتحولان الى متطابقتين، لان القوى الداخلية $\sigma dF$ عمودية على هذين المحورين.

٣ — نساوى مجموع المساقط على المحور $z$ للصفر:

$$\Sigma Z = 0; \quad \int_F \sigma dF = 0 .$$

12—1894

وباستعمال الصيغة (٦ ــ ٥)، نحصل على

$$\frac{E}{\rho}\int_F ydF=0$$

ولكن $\frac{E}{\rho}\neq 0$ ، وذلك لان $\rho\neq 0$، حيث ان العتبة المذكورة منحنية، اذن $\int_F ydF=0$.

يمثل هذا التكامل العزم الاستاتيكي لمساحة المقطع العرضي للعتبة بالنسبة للمحور المحايد. وبما انه يساوي صفرا، اذن يستنتج بان المحور المحايد يمر بمركز ثقل المقطع عند الانحناء.

٤ ــ تتحول المعادلة $\Sigma M_z=0$ الى متطابقة، وذلك لان القوى الداخلية $\sigma dF$ موازية للمحور $z$ .

٥ ــ المعادلة $\Sigma M_y=0$ تعطى $\int_F \sigma dF_x=0$. وباستعمال الصيغة (٦ ــ ٥) ، نحصل على:

$$\frac{E}{\rho}\int_F xydF=0\,.$$

ولكن $\frac{E}{\rho}\neq 0$، لذا:

$$\int_F xydF=0\,.$$

ان التكامل $J_{xy}=\int_F xydF$ يمثل عزم القصور الذاتى المركزى للمقطع بالنسبة للمحورين $x$ و $y$ .

وبما انه يساوى صفرا، لذا يجب ان يكون المحوران $x$ و $y$ محورين رئيسيين للقصور الذاتى للمقطع، ويجب ان يقع العزم $\mathfrak{M}$ فى مستوى يمر باحد المحاور الرئيسية، كما فى حالة الانحناء المستوى. ومن هنا يستنتج بان خط القوى والمحور المحايد (خط الصفر) متعامدان فيما بينهما.

٦ ــ نساوى مجموع عزوم القوى بالنسبة للمحور $x$ للصفر:

$$\Sigma M_x=0\,;\quad -\mathfrak{M}+\int_F y\sigma dF=0$$

وباستعمال الصيغة (٦ — ٥) ، نحصل على:

$$\mathfrak{M} = \frac{E}{\rho} \int y^2 dF \, .$$

ان التكامل $J_x = \int_F y^2 dF$ ، يمثل عزم القصور الذاتى للمقطع بالنسبة للمحور المحايد $x$ .

وقد لا تؤثر على الجزء المقطوع من العتبة القوة المزدوجة الخارجية وحدها، بل عدة قوى وكذلك اى حمل آخر. فى هذه الحالة، يدخل فى معادلة التوازن $\Sigma M_x = 0$، المجموع الجبرى لعزوم جميع هذه القوى ويساوى بالمقدار عزم الحناية فى المقطع العرضى.

وبأخذ ما ذكر اعلاه فى الاعتبار، فان العلاقة الاخيرة يمكن ان تكون على الصورة التالية:

$$M_b = \frac{E}{\rho} J_x \qquad (٦ - ٦)$$

ومن هنا:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_b}{EJ_x} \, . \qquad (٦ - ٧)$$

ان المقدار $K = \frac{1}{\rho}$ يمثل تقوس الطبقة المحايدة للعتبة.

لقد ذكرنا اعلاه، بان الخط المحايد للمقطع العرضى يمر بمركز ثقل المقطع العرضى. لذا، فان محور العتبة (المحور الطولى)، وهو المحل الهندسى لمراكز ثقل مقاطعها العرضية، يقع فى الطبقة المحايدة. وعلى هذا الاساس نجد ان الصيغة (٦ — ٧) تحدد تقوس العتبة. .

وهكذا، فان تقوس محور العتبة عند الانحناء يتناسب طردياً مع عزم الحناية وعكسياً مع المقدار $EJ_x$ المسمى بـ«صلادة» المقطع عند الانحناء.

وبتعويض القيمة $\frac{1}{\rho}$ التى حصلنا عليها فى الصيغة (٦ — ٥)، نحصل على صيغة مهمة:

$$\sigma = \frac{M_b}{J_x} y \qquad (٦ - ٨)$$

وتسمح لنا هذه الصيغة بتحديد مقدار الاجهاد العمودى فى اية نقطة كانت للمقطع العرضى للعتبة، بواسطة عزم الحناية $M_b$ وعزم القصور الذاتى للمقطع.

وكما تظهر الابحاث الدقيقة جدا، فان الصيغة (٦ — ٨) صالحة لتحديد الاجهادات العمودية فى حالة الانحناء المستوى العامة (عند الانحناء المستوى العرضى) عندما يؤثر فى المقاطع العرضية للعتبة عزم الحناية والقوة العرضية معا.

### ٥٣ — شروط المتانة المبنية على اساس الاجهاد المتعامد

لتأمين متانة العتبة من الضرورى الا تكون الاجهادات الشادة العظمى والاجهادات الضاغطة العظمى عند الانحناء فى المقطع الخطر، اى فى المقطع الذى تكون فيه لـ $M_b$ قيمة عظمى، قد تجاوزت الاجهادات المناظرة المسموح بها (تبحث هنا عتبة ذات مقطع عرضى ثابت على طول العتبة).

ان $h_t$، (انظر الشكل ٦ — ١٨) هى المسافة بين محور الحياد وبين ابعد ليفة مشدودة و $h_c$ — المسافة حتى ابعد ليفة مضغوطة. وعند ذلك، يكون اجهاد الشد الاعظم عند الانحناء:

$$\max \sigma_t = \frac{M_b}{J_x} h_t . \quad (٦ — ٩)$$

واجهاد الانضغاط الاعظم (نأخذه بالقيمة المطلقة):

$$\max \sigma_c = \frac{M_b}{J_x} h_c . \quad (٦ — ١٠)$$

تكون الاجهادات المسموح بها للمواد الهشة (مثلا حديد الزهر): $[\sigma_c]$ اكبر بـ ٣ — ٥ مرات من $[\sigma_t]$، ولذا تكون مقاطع العتبات المصنوعة من هذه المواد غير متماثلة بالنسبة لمحور الحياد. ويجب ان تكون العلاقة بين المقاطع على الوجه التالى، $h_t < h_c$، اى يجب تحقيق المتباينة $\max\sigma_t < \max\sigma_c$ وفى الحالات المذكورة اعلاه يجب وضع شرطين للمتانة:

$$\max \sigma_t = \frac{M_b}{J_x} h_t \leqslant [\sigma_t] \quad (٦ — ١١، a)$$

$$\max \sigma_c = \frac{M_b}{J_x} h_c \leqslant [\sigma_c] . \quad (٦ — ١١، b)$$

ويجب التعويض فى الصيغتين (٦ — ١١، $a$) و (٦ — ١١، $b$) بالقيمة العظمى لـ $M_b$ (بالقيمة المطلقة).

واذا كانت مقاطع العتبة متماثلة بالنسبة لمحور الحياد (مثل هذه المقاطع من المفيد اتخاذها فى العتبات المصنوعة من المواد اللدنة). اى اذا كان $h_t = h_c = \frac{h}{2}$ ، فعوضا عن الصيغتين (٦ — ٩) و (٦ — ١٠) نحصل على صيغة واحدة:

$$\sigma = \frac{M_b h}{J_x \cdot 2} \qquad (٦ — ١٢)$$

وبعد ان نرمز $W_x = \frac{2Jx}{h}$ ، فعند تساوى الاجهادات المسموح بها فى حالة الشد او الانضغاط $[\sigma]$ ، نحصل على شرط المتانة التالى:

$$\max \sigma = \frac{M_b}{W_x} \leqslant [\sigma]\,. \qquad (٦ — ١٣)$$

ويسمى المقدار $W_x$ بعزم المقاومة المحورى او عزم المقاومة عند الانحناء. وعزم المقاومة هو الخاصية الهندسية للمقطع العرضى للعتبة الذى يحدد متانتها عند الانحناء.

ان قيم $W_x$ للمقاطع البسيطة تكون كما يلى:

أ — للمستطيل:

$$W_x = \frac{2J_x}{h} = \frac{bh^3}{12\frac{h}{2}} = \frac{bh^2}{6}$$

ب — للدائرة:

$$W_x = \frac{2J_x}{d} = \frac{\pi d^4}{64d/2} = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0.1\, d^3$$

جـ — للحلقة:

$$W_x = \frac{2J_x}{D} = \frac{\pi D^4 (1-c^4)}{64D/2} = \frac{\pi D^3}{32}(1-c^4) \approx 0.1\, D^3 (1-c^4)$$

د — للمقاطع المدلفنة (مقطع شكل I، مجرى — مقطع شكل ـــــ وما شابه ذلك) فان قيم $W_x$ موجودة فى جداول خاصة. ولاختيار مقطع العتبة من المعادلة (٦ — ١٣) نحصل على العلاقة التالية:

$$W_x \geqslant \frac{M_b}{[\sigma]} \qquad (٦ — ١٤)$$

وعزم الحناية المسموح به يحدد بواسطة الصيغة:

$$[M_b] = W_x [\sigma] \qquad (٦ - ١٥)$$

وبايجاد مقدار عزم الحناية المسموح به بواسطة هذه الصيغة، وبمعرفة العلاقة بين $M_b$ والحمل (حسب الرسم البيانى المخطط لـ $M_b$)، يمكن تحديد مقدار الحمل المسموح به.

مثال ٦ — ١٠. يراد اختيار مقطع عتبة على شكل I امتدادها $l = 6m$ ومحملة بحمل منتظم التوزيع (انظر الشكل ٦ — ١٢):

$$q = 4\frac{t}{m}, \ [\sigma] = 1\,600 \text{ kg/cm}^2$$

الحل. يكون عزم الحناية الاعظم فى هذه الحالة فى المقطع الوسطى للعتبة.

$$\max M_b = \frac{ql^2}{8} = \frac{4 \cdot 36}{8} = 18 \text{ tm} = 18 \cdot 10^5 \text{ kg/cm}$$

وان عزم المقاومة المطلوب:

$$W_x = \frac{\max M_b}{[\sigma]} = \frac{18 \cdot 10^5}{1\,600} = 1125 \text{ cm}^3$$

ومن تلك الجداول الخاصة، نختار مقطع شكل I رقم 45 الذى له $W_x = 1220 cm^3$ (حسب معطيات $GOST$ 8239 — 56).

فى هذا المثال وفى الامثلة التالية، سنستعمل جدولا جديدا (حسب المواصفات $GOST$ 8239 — 56).

وعند استعمال نظام وحدات القياس العالمى ($Si$) فان الحل يأخذ الشكل التالى:

ان الحمل الموزع الذى يؤثر على العتبة هو $q = 4\frac{t}{m} = 4 \times 10^4 N/m$.

وان الاجهاد المسموح به هو $[\sigma] = 16 \times 10^7 \frac{N}{m^2} = 160 \frac{MN}{m^2}$. حيث $MN$ تعنى ميجا نيوتن.

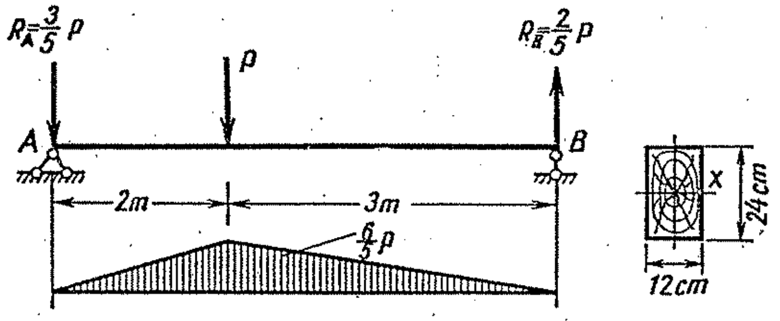
ان عزم الحناية الاعظم هو:

$$\max M_b = 18\cdot10^5 \text{ kg cm} = 18\cdot10^6 \ N \text{ cm} = 18\cdot10^4 \ Nm$$

وعزم المقاومة المطلوب هو:

$$W_x = \frac{18\cdot10^4 \ Nm}{16\cdot10^7 N/m^2} = 0.001125 \text{ m}^3 = 1125 \text{ cm}^3.$$

<u>مثال ٦ — ١١.</u> يراد تحديد الحمل المسموح به لعتبة ذات مقطع عرضي مستطيل (الشكل ٦ — ١٩) اذا كانت $[\sigma] = 100 kg/cm^2$ ، $a = 1m$ .




الشكل ٦ — ١٩

الحل. نحدد مقدار عزم الحناية المسموح به.

$$[\max M_b] = W_x[\sigma] = \frac{bh^2}{6}[\sigma] = \frac{12\cdot24^2}{6}100 = 115.2\times10^3 \text{kgcm} = 1.15 \text{ tm}$$

ولاجل تحديد الحمل المسموح به، من الضرورى معرفة العلاقة بين عزم الحناية الاعظم وبين الحمل، ولذا فمن الضرورى تخطيط الرسم البيانى لعزوم الحناية.

نحدد ردود الفعل، نحصل على $R_A = \frac{3}{5}P$ و $R_B = \frac{2}{5}P$ ويكون عزم الحناية الاعظم فى المقطع الذى يقع تحت الحمل ويساوى:

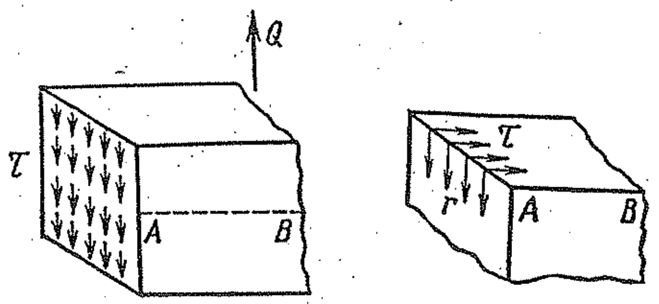
$$\max M_b = R_A 2a = \frac{6}{5}P.$$

ويمكن الآن تحديد الحمل المسموح به:

$$[P] = \frac{5}{6a}[\max M_b] = \frac{5}{6\times1}1.15 \approx 0.96 \, t.$$

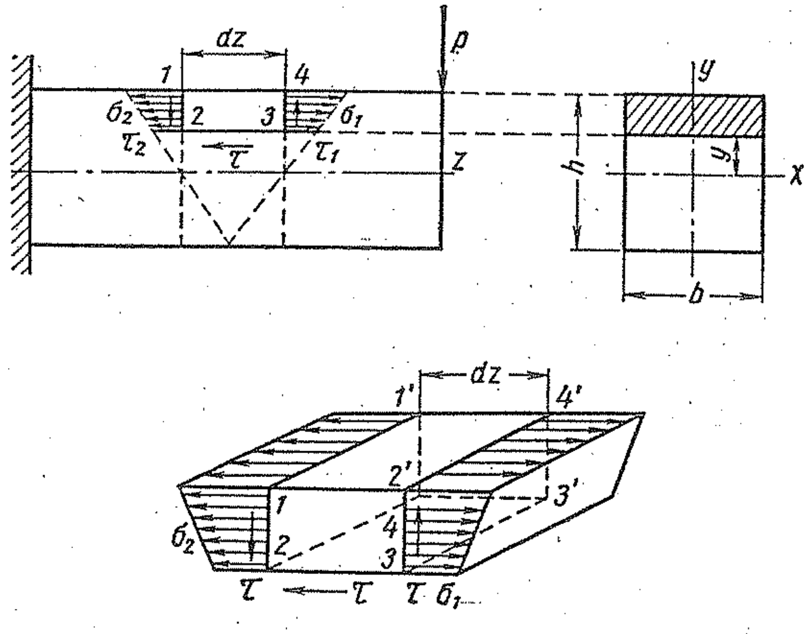
## ٥٤ – تحديد الاجهادات المماسية (اجهادات القص)

فى الحالة العامة للانحناء (الانحناء العرضى) تظهر فى المقاطع العرضية للعتبة عزوم حناية وقوى عرضية. ان وجود عزم الحناية مرتبط بالاجهادات العمودية التى تظهر فى المقاطع العرضية للعتبة، والتى تحدد بواسطة الصيغة (٦ — ٨).




الشكل ٦ — ٢٠

ووجود القوة العرضية مرتبط بالاجهادات المماسية التى تظهر فى مقاطع العتبة العرضية، وبقانون ازدواج الاجهادات المماسية فى مقاطعها الطولية (الشكل ٦ — ٢٠). ولتحديد الاجهادات المماسية، نأخذ اولا عتبة ضيقة مستطيلة




الشكل ٦ — ٢١

المقطع العرضى (الشكل ٦ — ٢١). نقتطع من العتبة جزءا صغيرا طوله $dz$ وعرضه مساو لعرض العتبة $b$ . وتؤثر على هذا الجزء القوى التالية :

تؤثر على الوجه $344'3'$ ، الاجهادات العمودية التى تساوى حسب الصيغة (٦ — ٨):

$$\sigma_1 = \frac{M_1}{J_x} y \quad \text{(أ)}$$

حيث $M_1$ — عزم الحناية فى الوجه $344'3'$ .

وعدا ذلك تؤثر فى المقطع المذكور اجهادات مماسية $\tau$، وهى مجهولة الان ويمكن ان تعتبر منتظمة التوزيع على عرض المقطع، نظرا لصغر عرض مقطع العتبة*.

وتؤثر على الوجه $122'1'$ اجهادات عمودية، هى:

$$\sigma_2 = \frac{M_2}{J_x} y \quad \text{(ب)}$$

واجهادات مماسية هى $\tau$.

وتؤثر على الوجه $322'3'$ اجهادات مماسية فقط، وهى حسب قانون إزدواج (ترافق) القوى تساوى الاجهادات المماسية التى تؤثر على الوجوه العمودية. نضع معادلة توازن جزء العتبة المقطوع. نسقط القوى التى تؤثر فى الجزء على الاحداثى الافقى. ومن البديهى، الا تدخل فى المعادلة المذكورة، القوى المماسية التى تؤثر على الوجوه العمودية.

ومسقط القوة المماسية المؤثرة على الوجه $233'2'$ يساوى القيمة الحقيقية لها $\tau bdz$. اما الاجهادات العمودية التى تؤثر على الوجه $344'3'$ ، فستكون محصلتها:

$$N_1 = \int_{F_{cut}} \sigma_1 dF$$

*يسمى هذا الافتراض بنظرية جورافسكى.

ومحصلة الاجهادات العمودية التى تؤثر على الوجه $122'1'$ هى:

$$N_2 = \int_{F_{cut}} \sigma_2 dF$$

ويجب ان يشمل هذان التكاملان مساحة القسم المقطوع، اى مساحة الوجهين $122'1'$ و $344'3'$ .

وباستعمال معادلة التوازن $\Sigma Z = 0$ ، فاننا نحصل على:

$$-N_2 + N_1 - \tau b dz = 0$$

او

$$-\int_{F_{cut}} \sigma_2 dF + \int_{F_{cut}} \sigma_1 dF - \tau b dz = 0$$

وباستعمال الصيغتين (أ) و (ب)، نحصل على:

$$-\frac{M_2}{J_x}\int_{F_{cut}} y dF + \frac{M_1}{J_x}\int_{F_{cut}} y dF - \tau b dz = 0.$$

ان التعبير $\int_{F_{cut}} y dF = S_x^{cut}$ يمثل العزم الاستاتيكى لمساحة القسم المقطوع بالنسبة لمحور التعادل. ولذا فان

$$\frac{S_x^{cut}}{J_x}(M_1 - M_2) = \tau b dz$$

ولكن $M_1 - M_2 = dM_z$، هى زيادة عزم الحناية على الطول $dz$. ولذا فمن الممكن كتابة الصيغة السابقة على الشكل التالى:

$$\frac{S_x^{cut} dM_z}{J_x} = \tau b dz$$

ومن هنا:

$$\tau = \frac{S_x^{cut} dM_z}{J_x b dz}$$

وباستعمال العلاقة (٦ — ٢):

$$\frac{dM_z}{dz} = Q_z$$

نحصل فى النهاية على:

$$\tau = \frac{QS_x^{cut}}{J_x b} \qquad (٦ - ١٦)$$

واول من وضع هذه العلاقة هو د. جورافسكى، لذا فهى تسمى باسمه نبحث قانون توزيع الاجهادات المماسية على مقطع العتبة المستطيلة (الشكل ٦ — ٢٢). ويحدد هذا القانون بواسطة قانون تغير $S_x^{cut}$ ، لان المقادير الاخرى لهذا المقطع ثابتة، حيث:

$$J_x = \frac{bh^3}{12}$$

ان العزم الاستاتيكى للمساحة المظللة بالنسبة لمحور $x$ ، يساوى:

$$S_x^{cut} = b\left(\frac{h}{2} - y\right)\frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} + y\right) = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right).$$

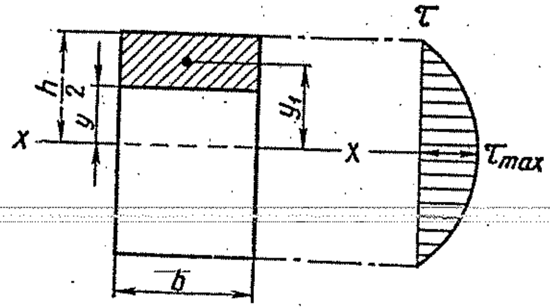
وهذه معادلة القطع المكافئ.

الاجهادات المماسية تساوى

$$\tau = \frac{Qb\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)\cdot 12}{bh^3\cdot 2b} = \frac{6Q}{bh^3}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

نخطط رسما بيانيا بواسطة ثلاث نقاط:

$$\tau_{y=\frac{h}{2}} = 0; \qquad \tau_{y=0} = \frac{3}{2}\frac{Q}{F}; \quad \tau_{y=-\frac{h}{2}} = 0.$$




الشكل ٦ — ٢٢

ويوضح الشكل ٦ — ٢٢ الرسم البياني لـ τ. ان الاجهاد المماسى الاعظم للعتبة ذات المقطع المستطيل يكون فى مستوى محور التعادل، ويساوى:

$$\tau_{max} = \frac{3}{2}\frac{Q}{F} \qquad (٦ — ١٧)$$

اى اكثر بمرة ونصف من ذلك الاجهاد الذى نحصل عليه ، لو افترضنا ان الاجهادات المماسية منتظمة التوزيع فى المقطع.

ويمكن استعمال صيغة جورافسكى بعد تقريبها، لحساب الاجهادات المماسية فى العتبات التى لها مقاطع عرضية مختلفة الاشكال . وبنفس الطريقة نحصل على رسم بيانى لـ τ للمقطع الدائرى، الموضح فى الشكل ٦ — ٢٣، حيث تكون القيمة العظمى لمحور التعادل:

$$\tau_{max} = \frac{4}{3}\frac{Q}{F}. \qquad (٦ — ١٨)$$

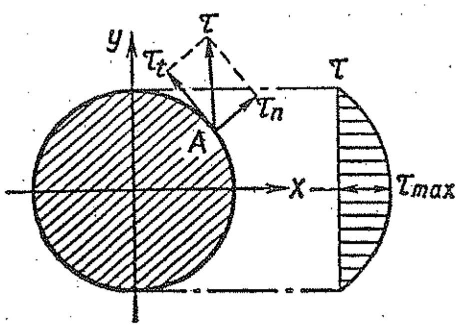
وللمقطع الحلقى:

$$\tau_{max} = \frac{2Q}{F}. \qquad (٦ — ١٩)$$

وتجدر الاشارة الى ان الاجهاد المماسى الموازى للقوة العرضية يحدد بواسطة صيغة جورافسكى. وفى مثل هذه المقاطع ، مثلا الدائرة، المثلث، وما شابه ذلك، تظهر فى النقاط الواقعة على سطح المقطع اجهادات مماسية، متجهة باتجاه مماسى لمحيط المقطع.

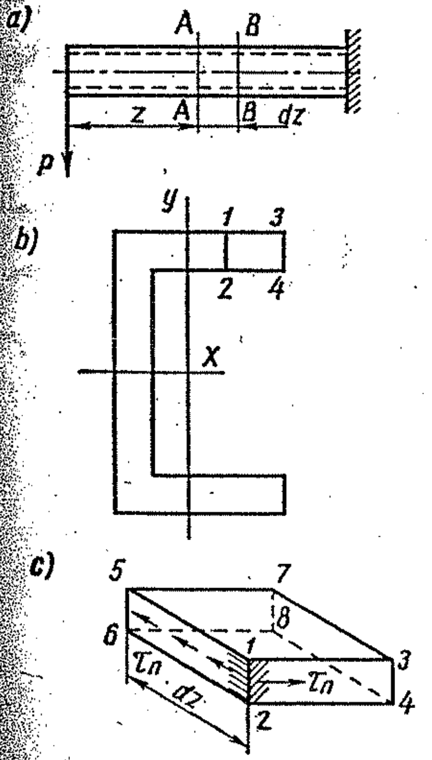
نبحث مثلا النقطة $A$ ، القريبة من محيط المقطع الدائرى (الشكل ٦ — ٢٢). فلو فرضنا، اننا حصلنا بواسطة صيغة جورافسكى على الاجهاد الكلى τ، فبتحليله، نحصل على مركبتين: عمودية على المحيط $\tau_n$ ومماسة له $\tau_t$.

ولكن حسب شروط التحميل فان سطح القضيب خال من الاجهادات.

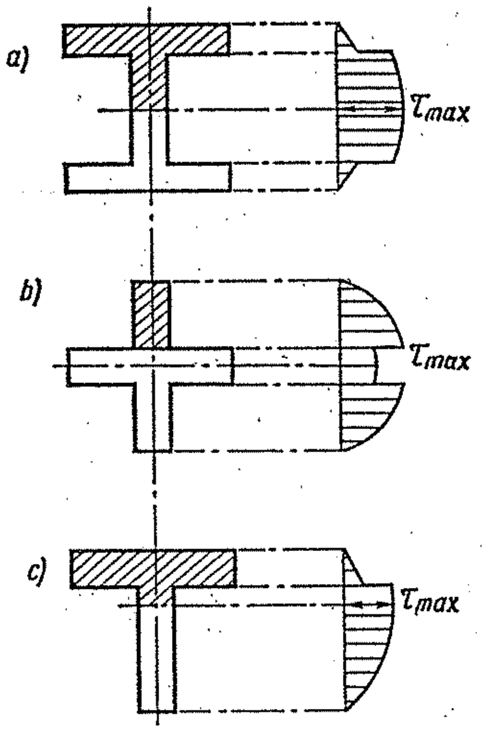


الشكل ٦ — ٢٣

اذن، فلا يمكن للاجهاد المماسى فى النقطة $A$، وكذلك فى النقاط المحيطية الاخرى ان يكون باتجاه رأسى (عمودى)، ويمكن ان يتجه باتجاه مماسى للمحيط. ولذا وحسب الطريقة التى ذكرت اعلاه، نحدد فقط المركبة الرأسية، وليس المقدار الكلى للاجهاد المماسى.




الشكل ٦ — ٢٥




الشكل ٦ — ٢٤

ولتحديد المركبة الافقية، يتطلب استعمال طريقة اكثر تعقيدا من تلك التى استعملت. ان فحص الحلول الدقيقة لنظرية المرونة يرينا، بان مركبات $\tau$ باتجاه محور السينات تلعب فى اكثر الحالات دورا اقل من الدور الذى تلعبه المركبات التى باتجاه محور الصادات.

وفى العتبات التى لها المقطع I، يكون الرسم البيانى لـ $\tau$ متدرجا، وذلك نتيجة للتغيرات المفاجئة فى عرض العتبة * (الشكل ٦ — ٢٤، $a$).

*يجب الأخذ فى الاعتبار ان ذلك الجزء من الرسم البيانى المتعلق بشفتى العتبة، يملك خاصية اصطلاحية، ذلك لان فرضية التوزيع المنتظم للاجهادات المماسية على عرض المقطع، لا

ويكون الاجهاد المماسي الاعظم للمقطع — I فى نقاط محور التعادل، ويحدد بواسطة صيغة جورافسكى، مع أخذ العزم الاستاتيكى للمساحة المظللة (نصف مقطع). وتوجد فى جداول خاصة قيم العزم الاستاتيكى لنصف المقاطع التى تأخذ على هيئة I وعلى هيئة ــــ (المجارى). والشكلان ٦ — ٢٤، $b$ و ٦ — ٢٤، $c$، يوضحان انواع الرسوم البيانية لـ $\tau$ لبعض المقاطع الاخرى.

ويكتب شرط المتانة حسب الاجهادات المماسية، على الشكل التالى:

$$\tau_{max} \leqslant [\tau],$$

حيث $\tau$ — الاجهاد المماسى المسموح به. للعتبات الفولاذية $[\tau] \approx 0.6\,[\sigma]$.

ولبعض العتبات التى تصنع من مواد رديئة المقاومة للقص، مثل الخشب (باتجاه الالياف) يكون التأكد من المتانة بواسطة الاجهادات المماسية ضروريا.

ان نظرية تحديد الاجهادات المماسية المذكورة اعلاه، صحيحة فقط بالنسبة للمقاطع الصم (المقاطع الصلبة).

وكما ذكر اعلاه، ففى القضبان الرقيقة الجدران، وعند انطباق مستوى القوة على احد محاور القصور الذاتى الرئيسية المركزية للمقطع، تكون ظاهرة الالتواء محتملة. ولفهم هذا بصورة ادق، لنتناول عتبة كابولية لها مقطع صندوقى (الشكل ٦ — ٢٥، $a$). وفى الشكل ٦ — ٢٥، $b$ يبين المقطع العرضى لهذه العتبة بمقياس رسم مكبّر.

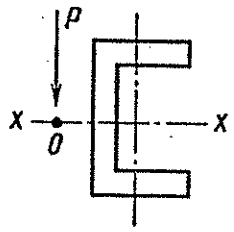
نفرض ان الحمل $P$ يوجد فى المقطع ويمر بمحور القصور الذاتى الرئيسى المركزى للمقطع $y$، الذى لا يعتبر محور تماثل للمقطع (الشكل ٦ — ٢٥، $b$). بواسطة المقطع 12 نقتطع قسما من الشفة العليا طوله $dz$ بحيث يكون موازيا للمستوى $yz$ ونبحث توازن القسم المقطوع (الشكل ٦ — ٢٥، $c$). نفرض ان وجه الجزء 1234 يخص المقطع B. فى الوجهين 8657 و 1234 للجزء نفسه

تستعمل هنا حسب ما ورد اعلاه فان الرسم البيانى لـ $\tau$ فى المقاطع العرضية التى على هيئة I تخطط فقط فى حدود الجدران كما هو متبع.

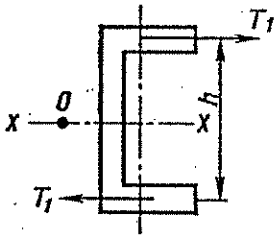
تؤثر الاجهادات العمودية $\sigma_1$ و $\sigma_2$ . وان القوة العمودية المؤثرة على المساحة 1234 التي تقع في المقطع B، اكبر من القوة العمودية المؤثرة على المساحة 8657 ، لان عزم الحناية في المقطع B اكبر مما هو عليه في المقطع A.

ولذا، فان توازن الجزء المقتطع، يكون ممكنا فقط في تلك الحالة، اذا اثرت على الوجه 1265 الاجهادات المماسية $\tau_n$ ، ولكننا ثبتنا قانون ازدواج (ترافق) الاجهادات المماسية. ولذا فعند ظهور الاجهادات المماسية في الوجه 1265 ، يجب ان تظهر ايضا في النقاط التي حول الضلع 12 على المساحة 1243 اجهادات مماسية مساوية لها بالمقدار ومضادة لها في الاشارة. وبنفس المناقشة نتأكد، من انه تظهر في الشفة السفلى للعتبة الصندوقية اجهادات مماسية افقية، يكون اتجاهها مضادا لاتجاه الاجهادات المماسية التي تؤثر في مقطع الشفة العليا.

ومحصلة هذه القوى $T_1$ ، تشكل ازدواجا داخليا للقوى $T_1h$ (الشكل ٦ — ٢٦) «عزم لي داخلي».




الشكل ٦ — ٢٧




الشكل ٦ — ٢٦

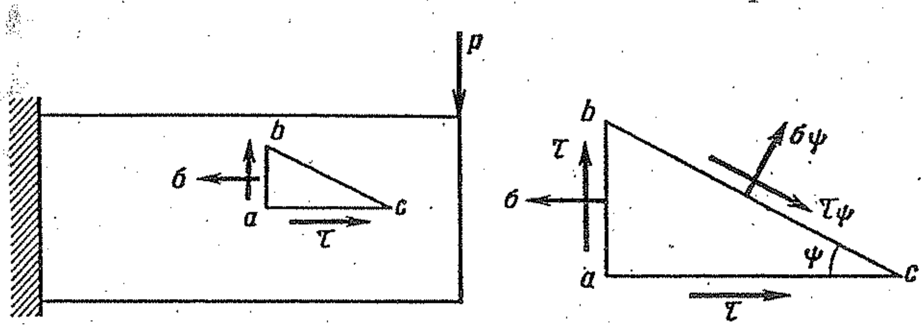
وعلى هذا الاساس فان انحناء القضيب يصاحبه التواء.

وتتوزع هنا الاجهادات العمودية في المقطع حسب قانون اكثر تعقيدا من قانون التوزيع عند الانحناء المستوي.

ولاجل الحصول على انحناء مستو مع محور التعادل $x$ ، يجب ان يمر المستوي الرأسي الذي تؤثر فيه القوة $P$ بالنقطة المعينة $O$ (الشكل ٦ — ٢٧) التي تسمى بمركز الانحناء (واحيانا يسمى: مركز الالتواء، مركز الصلادة، مركز التقشع). ان ف. فلاسوف هو واضع نظرية حساب القضبان الرقيقة الجدران بخصوص الانحناء والالتواء.

## ٥٥ – الاجهادات فى المقاطع المائلة للعتبة.
### الاجهادات الرئيسية

لقد اثبتنا ان الاجهادات العمودية والمماسية تؤثر فى مقاطع العتبة العرضية، اما فى المقاطع الطولية، فتؤثر الاجهادات المماسية فقط *. وفى المقاطع المائلة للعتبة، مثلا فى المساحة $bc$ (الشكل ٦ – ٢٨)، تظهر الاجهادات العمودية والمماسية، ويمكن استعمال صيغ البند ١٩ لحسابها.




الشكل ٦ – ٢٨

نستعمل الصيغة (٢ – ٣٧)، لتحديد الاجهادات الرئيسية:

$$\sigma_{\substack{max\\min}} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

وتحدد زاوية ميلان المساحات الرئيسية بواسطة الصيغة (٢ – ٣٥):

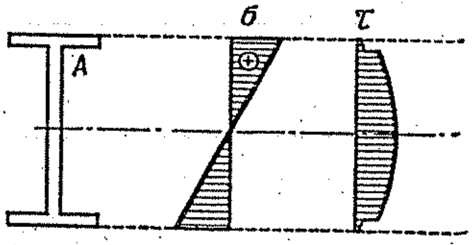
$$\tan 2\psi_0 = \frac{2\tau}{\sigma}$$

ان الاجهادات المماسية العظمى والصغرى التى تؤثر على مساحات، وتشكل مع المساحات الرئيسية الزاوية $\pm 45°$ ، تكون قيمتها حسب الصيغة (٢ – ٢٣) كالآتى:

$$\tau_{\substack{max\\min}} = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}.$$

* ان عدم وجود الاجهادات العمودية فى المقاطع الطولية للعتبة، يستخلص من النظرية التى اتخذناها حول عدم وجود الضغط المتبادل بين الالياف (راجع البند ٥٢).

ويتضح من هذه الصيغة، ان الاجهادات الرئيسية $\frac{\sigma_{max}}{min}$ و $\frac{\tau_{max}}{min}$ ستحصل على القيم العظمى فى تلك النقاط من المقطع العرضى التى تكون لها اجهادات عمودية ومماسية كبيرة فى وقت واحد. فللمقطع I مثلا، تعتبر النقطة $A$ احدى هذه النقط– النقطة العليا (او السفلى) للجدار (الشكل ٦–٢٩) ولكن ذلك لا يحدث بصورة دائمية.



الشكل ٦ – ٢٩

فعندما تكون للاجهادات المماسية قيم كبيرة، عندئذ يمكن ان تكون للاجهادات الرئيسية قيمة كبرى، توجد فى نقطة الجدار، الواقعة تحت النقطة A.

ويمكن ايجاد موضع هذه النقطة، كذلك القيمة العظمى للاجهاد الرئيسى بجعل $\sigma_{max}$ الاجهاد الاعظم (الصيغة ٢ – ٣٧) فى الحالة الحدية، وذلك لان الاجهاد العمودى $\sigma$ يزداد حسب الابتعاد عن محور التعادل، اما الاجهاد المماسى فيقل (انظر الشكل ٦ – ٢٩).

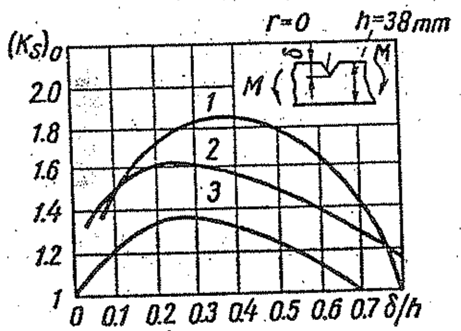
وهذه مسألة هامة وممتعة، نقترح على الطلاب القيام ببحثها بانفسهم.

ومن الواضح ايضا، انه يجب التأكد من الاجهادات الرئيسية على طول العتبة فى تلك المقاطع التى يكون فيها لعزم الحناية (الذى يحدد $\sigma$ ) وللقوة العرضية (التى تحدد $\tau$)، قيمة كبيرة فى نفس الوقت.

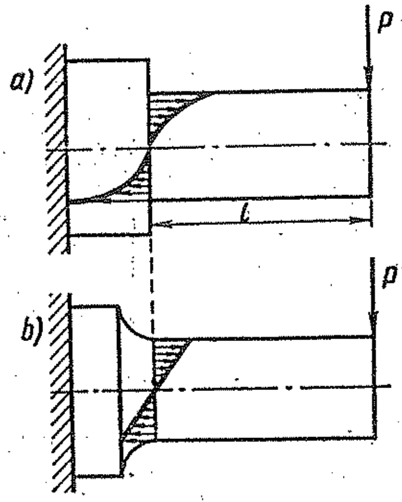
### ٥٦ – تركز الاجهادات عند الانحناء

فى المواضع التى يتغير فيها محيط المقطع الطولى للعتبة فجأة، تتغير صورة توزيع الاجهادات كذلك فجأة، وتظهر تركزات للاجهدات (الشكل ٦ – ٣٠، $a$). ومن الضرورى ازالة التغيرات الفجائية لمحيط المقطع الطولى للعتبة، لاجل تقليل تركز الاجهادات، ذلك باستعمال الانتقال التدريجى الذى يسمى بمنحنى الاتصال او الشرحة (الشكل ٦ – ٣٠، $b$).

ويحدد تأثير تركيز الاجهادات على المتانة الاستاتيكية للمواد القليلة اللدونة والهشة، اما بالمعامل النظرى لتركز الاجهادات $\alpha_\sigma$ الذى يحسب بطريقة نظرية المرونة، او بواسطة المعامل الفعال للتركز $k_s$ ، الذى يحسب بالطرق




الشكل ٦ — ٣١




الشكل ٦ — ٣٠

التجريبية. ولاجل هذا، يعين حد المتانة عند الانحناء لنموذج دون تركز اجهادات، وايضا لنموذج فيه تركز اجهادات $\sigma_{u.b.c.}$

وتحدد النسبة $k_s = \frac{\sigma_{u.b.}}{\sigma_{u.b.c.}}$، مقدار المعامل الفعال لتركز الاجهادات للنموذج. وتوجد معطيات عن المقدار $k_s$ فى الدليل. وتوجد فى الشكل ٦ — ٣١ مثلا، معطيات المقدار $(k_s)_0$ لشريط مستطيل بثلم حاد على احد طرفيه، لمواد مختلفة هى:

١ — المنحنى 1 — سبيكة الومينية $\sigma_u = 16 kg/mm^2$ .

٢ — المنحنى 2 — حديد الزهر الرمادى والنيكلى.

٣ — المنحنى 3 — حديد زهر التنجستن.

ويتم حساب معامل التركز للاجزاء التى لها ابعاد اخرى، بواسطة ضرب $(k_s)_0$ فى معامل تصحيحى، قيمه معطاة فى دليل خاص.

وعند تأثير الاحمال المتكررة (عند الحساب الخاص بالاطاقة)، يحسب تركز الاجهادات بالنسبة لجميع المواد.

## ٥٧ – طاقة وضع التشوه عند الانحناء

يصرف الشغل الذى تقوم به القوى الخارجية عند الانحناء، وكذلك عند اية تشوهات اخرى، على تغيير طاقة وضع القضيب المشوه.

ونحسب طاقة الوضع لحالة الانحناء الخالص ويمكن حساب شغل العزم الخارجى كنصف حاصل ضرب مقدار العزم فى زاوية دوران المقطع (انظر الشكل ٦ — ١٦):

$$dA = \frac{1}{2}\mathfrak{M}\, d\varphi .$$

ويكون لشغل عزوم الحناية الداخلية نفس المقدار، ولكن تكون له اشارة سالبة:

$$dU = -\frac{1}{2} M_b d\varphi .$$

ويتضح من الرسم ان:

$$d\varphi = \frac{dz}{\rho} .$$

وسابقا حصلنا على معادلة للتقوس هى:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_b}{EJ_x}$$

ولذا فان:

$$dU = -\frac{1}{2}\frac{M_b^2}{EJ_x} dz .$$

عند الانحناء الخالص $M_b = \text{const}$ ، ونعبر عن الشغل الكلى للقوى الداخلية لعتبة طولها $l$ بالصيغة:

$$U = -\frac{1}{2}\frac{M_b^2 l}{EJ_x} . \qquad (٦ - ٢٠)$$

ان طاقة الوضع التى تساوى شغل القوى الداخلية، بعلامة مضادة، يعبر عنها بالصيغة:

$$\Pi = -U = \frac{1}{2}\frac{M_b^2 l}{EJ_x} . \qquad (٦ - ٢١)$$

ويشبه تركيب هذه الصيغة تركيب صيغة طاقة الوضع فى حالة الشد والالتواء وفى الحالة العامة للانحناء (عند الانحناء العرضى)، عندما تظهر فى المقاطع العرضية للعتبة ، عزوم الحناية وقوى عرضية، تكون طاقة الوضع للتشوه متألفة من قسمين: قسم يناظر شغل عزوم الحناية وقسم يناظر شغل القوى العرضية.

ويعبر عن شغل عزم الحناية المتغير على طول العتبة بتكامل الشغل الابتدائى:

$$U = -\frac{1}{2}\int_0^l \frac{M_b^2}{EJ_x}\,dz . \qquad (٦ - ٢٢)$$

وقد اظهرت حسابات المقارنة، ان شغل القوة العرضية عادة قليل جدا بمقارنته مع شغل عزم الحناية، ولذا فانه يهمل.